Corso di fisica II

Prova scritta del primo modulo del 14/11/07

Esercizio 1

Definiamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato, l'origine in corrispondenza della posizione iniziale della sbarra, e positivo verso il basso.
Il moto della sbarra si svolge unicamente lungo l'asse e tutte le forze agenti hanno risultante lungo tale asse: possiamo quindi operare sui moduli dei vettori.
Le forze agenti sono:

- la forza peso della sbarra: $F_P(M) = Mg\sin\alpha$
- la forza peso della massa appesa, portata tramite il filo $F_P(m) = -mg$
- la forza magnetica, in opposizione al moto: il movimento della sbarra in campo magnetico cambia il flusso magnetico attraverso il circuito sbarra – rotaia – resistenza – rotaia – sbarra, quindi si produce una $f.e.m$ e, di conseguenza, una corrente.

$$F_M = -IBd\cos\alpha = -\frac{f.e.m.}{R}Bd\cos\alpha = -\frac{vBd\cos\alpha}{R}Bd\cos\alpha = \frac{(Bd\cos\alpha)^2}{R}v$$

Si noti che questo è un effetto resistivo proporzionale alla velocità: ha l'aspetto di un attrito viscoso (in questo caso dovuto alla resistenza elettrica) e ha lo stesso effetto di dissipare energia.

La stessa espressione infatti può essere ricavata come $F_M = \frac{P_{DISSIPATA}}{v} = \frac{(Bd\cos\alpha)^2}{R}v$.

Si noti il limite di resistenza nulla (materiale superconduttore): la forza magnetica in opposizione tende all'infinito. Questo significa che non si può cambiare il flusso magnetico attraverso la superficie di una spira in materiale superconduttore.
Nel limite di resistenza grande, abbiamo un circuito aperto che non risente di forze magnetiche.

L'equazione del moto risulta quindi

$$(m+M)\ddot{x} = g(M\sin\alpha - m) - \frac{(Bd\cos\alpha)^2}{R}\dot{x} = a - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{v} = a - bv$$

Integrando rispetto al tempo, data la velocità iniziale nulla:

$$v = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$

Integrando nuovamente, con posizione iniziale nell'origine

$$x(t) = \frac{a}{b}\left[t + \frac{1}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)\right]$$

Ponendo poi

$$x = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{a}{b}\left[t + \frac{1}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)\right]$$

è possibile ricavare, non analiticamente, il tempo di arrivo della sbarra.

Esercizio 2

La capacità del condensatore dipende solo dalla configurazione del condensatore e non dalla configurazione del circuito che collega le due armature.

Il condensatore è equivalente alla serie di un condensatore riempito di dielettrico $C_1 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r L^2}{d_0}$ e di un condensatore vuoto $C_2 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d_0 / 2 - \alpha t}$

Si può subito scrivere la capacità in funzione del tempo come:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d_0} \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1 - 2\varepsilon_r \alpha t / d_0}$$

Per trovare la carica residua partiamo dalla legge di Ohm e poi sostituiamo I e V con le relazioni valide nel condensatore

$$RI = V \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} R = \frac{Q}{C(t)} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} = -(a - bt)dt$$

dove $a = \frac{(\varepsilon_r + 1) d_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 L^2}, b = \frac{2\varepsilon_r \alpha}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 L^2}$

Integrando si ottiene l'espressione della carica in funzione del tempo. Siamo interessati alla carica al tempo $t_0 : 0.75 d_0 = d_0 - \alpha t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{d_0}{4\alpha}$

$$Q(t_0) = Q_0 \exp\left(-a t_0 + \frac{b t_0^2}{2}\right) = Q_0 \exp\left\{-\left[\frac{4 + 3\varepsilon_r}{32\varepsilon_r}\right] \frac{d_0}{\alpha R C_0}\right\} = 0.65 Q_0 = 1.63\, pC$$